Primeira Prova 1º/2010

Thadeu Penna

13 de abril de 2010

1ª Prova

1. (3,0) Considere um sistema de N partículas em que cada uma pode ocupar apenas dois estados não degenerados de energias $e_1 = 0$ e $e_2 = \varepsilon$. Este tipo de sistema é conhecido na Mecânica Quântica e é utilizado para estudos de quiralidade, na molécula de amônia, sistemas de spins, etc. (a) Se a energia total do sistema é $E = m\varepsilon$, onde m é um número inteiro, obtenha a expressão para $\Omega(E)$. (b) Use a aproximação de Stirling ($\ln n! \approx n \ln n - n$) e encontre qual o valor de E para qual $\Omega(E)$ é máximo.

   - $\Omega(m) = N!/m!(N-m)! \therefore \Omega(E) = N!/(E/\varepsilon)!(N-E/\varepsilon)!$.
   - $\ln\Omega(m) = N\ln N - N - m\ln m + m - (N-m)\ln(N-m) + (N-m) = N\ln N/(N-m) - m\ln(N-m)/m$.
     Para achar o máximo $\frac{d}{dm}\Omega = -1 - \ln m + 1 + \ln(N-m)$ que se anula para $m = N/2$ ou $E = (N/2)\varepsilon$.

2. (2,0) Durante várias gerações, a enorme população de SimNation tem sido mantida constante. Curiosamente, todas as pessoas de SimNation se casam. Qual a probabilidade de um casal ter filhos ? E mais do que dois filhos ?

   - Para que a população se mantenha constante, é preciso que cada habitante gere um descendente. Logo o número médio de filhos por casal deve ser 2. Como a população é grande, podemos usar a distribuição de Poisson. A probabilidade de um casal não ter filhos será $p(0) = \frac{2^0}{0!}e^{-2} = e^{-2}$. A probabilidade de um casal ter filhos é $1 - p(0)$. A probabilidade de ter mais que dois filhos é $1 - p(0) - p(1) - p(2) = 1 - (1+2+4)e^{-2} = 1 - 7e^{-2}$.

3. (1,0) Sabendo que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\pi/a}$, calcule a média e a dispersão para a distribuição de probabilidades $p(x) \propto e^{(x-a)^2/2\sigma^2}$.

   - A média é a e a dispersão σ^2 (mas tem que resolver as integrais).

4. (3,0) Para um gás de partículas sem massa, como fótons e fônons, a relação entre energia e momento é dada por $\varepsilon = pc$. Obtenha $\Omega(E)$ para um gás de N partículas com massa de repouso nula, em um volume V.

   - $$\sum_{i=1}^{3N} p_i = \frac{1}{c}\sum \varepsilon_i = \frac{E}{c} = R$$

$$\Omega(E) \propto R^{3N} \propto V^N E^{3N}$$

5. (1,0) Comente as distribuições binomial, Poisson e normal. Apresente exemplos reais de cada uma delas, quando se aplicam e seus casos limites.